Chapitre : Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1 Propriétés relatives à la construction

Exercice 1 **Relation de Chasles** –

1. Soient $m,n \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \geq m$. Calculer $\int_m^n \lfloor x \rfloor dx$.
2. Calculer $\int_{-1}^2 x|x|dx$.
3. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $I(a) = \int_0^1 \min(x,a)dx$.

Indication ▼ Correction ▼ [385]

Exercice 2 **Retrouver la fonction** –

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a,b]$ et $\int_a^b f(x)dx = b-a$. Que dire de f ?

Indication ▼ Correction ▼ [386]

Exercice 3 **Intégrale de f et de f^2 –**

Déterminer les fonctions continues $f : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt$.

Indication ▼ Correction ▼ [387]

Exercice 4 **Égalité des valeurs absolues –**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| = \int_a^b |f(t)|dt.$$

Montrer que f garde un signe constant sur $[a,b]$.

Indication ▼ Correction ▼ [388]

Exercice 5 **Changement de signes** –

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, une fonction continue non identiquement nulle. On suppose qu'il existe un entier n tel que, pour tout $k \leq n$, on a $\int_a^b t^k f(t)dt = 0$. On souhaite prouver que, dans l'intervalle $[a,b]$, il existe au moins $n+1$ points où f s'annule en changeant de signe.

1. Traiter le cas $n = 0$.
2. Traiter le cas $n = 1$.
3. Traiter le cas général.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 6 **Une fonction lipschitzienne** –

1. Démontrer que la fonction sin est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^b f(t)\sin(xt)dt$$

est lipschitzienne.

Indication ▼ Correction ▼ [3151]

Exercice 7 **Lemme de Riemann-Lebesgue –**

Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$. On pose

$$u_n = \int_a^b \varphi(x)\sin(nx)dx.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Montrer que cette propriété est conservée si φ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Indication ▼ Correction ▼ [390]

2 Lien dérivée/intégrale

Exercice 8 **Toutes les intégrales sont nulles –**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout couple $(\alpha,\beta) \in [a,b]^2$, on a $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$. Montrer que $f = 0$.

Indication ▼ Correction ▼ [404]

Exercice 9 **Intégrale d'une fonction périodique –**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période T. On souhaite démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

1. Démontrer le résultat en introduisant la fonction $g(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$.

2. Démontrer le résultat en introduisant un entier n tel que $a \leq nT \leq a+T$ et en utilisant la relation de Chasles.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 10 **Dérivée périodique** –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que f' est T-périodique. On suppose que $f(T) \neq f(0)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f(nT) - f((n-1)T) = f(T) - f(0)$.
2. En déduire que f n'est pas périodique.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 11 ★★★★ **Équation –**

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $2yf(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$.

Indication ▼ Correction ▼

3 Sommes de Riemann

Exercice 12 **Limites de suites** –

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\dfrac{n\pi}{n}\right)\right)$.
2. $u_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$.
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.
4. $u_n = \sqrt[n]{\left(1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)}$.

Indication ▼ Correction ▼ [408]

Exercice 13 **Produit** –

Déterminer la limite de

$$v_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}.$$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 14 **Somme presque harmonique** –

Déterminer la limite de $S_n = \sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}$.

Indication ▼ Correction ▼ [1108]

Exercice 15 **Inégalité de Jensen** –

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et convexe. Démontrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt.$$

Indication ▼ Correction ▼

4 Intégrales et suites

Exercice 16 **Série harmonique alternée –**

Pour $n \geq 0$, on définit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

1. Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.
2. Pour $n \geq 0$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Indication ▼ Correction ▼ [411]

Exercice 17 **Un équivalent de** $\ln(n!)$ –

1. Montrer que, pour tout $i \geq 2$,

$$\int_{i-1}^{i} \ln t \, dt \leq \ln i \leq \int_{i}^{i+1} \ln t \, dt.$$

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_{1}^{n} \ln t \, dt \leq \ln(n!) \leq \int_{1}^{n} \ln t \, dt + \ln n.$$

2. Montrer que, pour tout $i \geq 2$,

$$\int_{i-1}^{i} \ln t \, dt \leq \ln i \leq \int_{i}^{i+1} \ln t \, dt.$$

3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_{1}^{n} \ln t \, dt \leq \ln(n!) \leq \int_{1}^{n} \ln t \, dt + \ln n.$$

4. Pour tout $x > 0$, calculer $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$.
5. En déduire que $\ln(n!)$ est équivalent à $n\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 18 **Série harmonique** –

On pose, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } v_n = u_n - \ln n.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq v_n \leq 1.$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel non nul,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}.$$

4. En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite γ (que l'on ne cherchera pas à calculer). Que dire de (u_n) ?

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 19 ★★★ **Intégrales de Wallis - obtention d'un équivalent –**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$.
2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. Etablir que, pour tout $n \in$, on a : $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
4. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

5. Montrer que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
6. Montrer que $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ et en déduire que $I_{n+1} \sim_{+\infty} I_n$.
7. Montrer que $I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Indication ▼ Correction ▼ [2646]

5 Limites d'intégrales

Exercice 20 **Suites d'intégrales –**

Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

$$\textbf{1}.\ u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx \qquad \textbf{2}.\ u_n = \int_0^n \frac{dt}{1+e^{nt}}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [412]

Exercice 21 ★★★ **Des limites de l'informatique –**

Pour $n \geq 0$, on considère la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^1 e^x (1-x)^n dx.$$

1. Calculer I_0 puis démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

2. Écrire sous Python une fonction permettant de calculer I_n en utilisant la relation de récurrence obtenue précédemment. Exécuter cette fonction. Quelle conjecture peut-on formuler sur la nature de la suite (I_n) ?

3. Démontrer que (I_n) est une suite décroissante, puis qu'elle est convergente. Quelle est sa limite ? Comparer avec votre conjecture.

4. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit une suite (J_n) par $J_{n+1} = (n+1)J_n - 1$ et $J_0 = a$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} - I_{n+1} = (n+1)(J_n - I_n)$.

5. En déduire, suivant la valeur de a, le comportement de la suite (J_n).

6. Expliquer le phénomène conduisant à la conjecture formulée à la question 2.

Indication ▼ Correction ▼ [2628]

Exercice 22 **En découpant –**

On note, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

Soit également $\alpha \in [0,1[$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n \leq 1$$

(on pourra encadrer $\int_0^\alpha$ puis $\int_\alpha^1$).

2. Démontrer que (I_n) est croissante.
3. Déduire des questions précédentes que (I_n) converge vers 1.
4. En s'inspirant du modèle précédent, étudier

$$J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-n\sin t} dt.$$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 23 **Cesaro pour les intégrales –**

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie a en $+\infty$. Montrer que

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \to a \text{ quand } x \to +\infty.$$

Indication ▼ Correction ▼ [418]

6 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 24 **Étude d'une fonction** –

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Est-elle paire, impaire ?
2. Étudier les variations de f, puis l'existence de limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Indication ▼ Correction ▼ [424]

Exercice 25 **Étude d'une fonction –**

Pour $x>0$, on note $\varphi(x)=\frac{e^{-x}}{x}$ et $f(x)=\int_x^{2x}\varphi(t)dt$.

1. Justifier que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.

2. Exprimer f en fonction d'une primitive ϕ de φ. En déduire que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

3. Étudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

4. Établir que, pour tout $x>0$, $e^{-2x}\ln(2)\leq f(x)\leq e^{-x}\ln(2)$. En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

5. On pose, pour $x\in]0,1[$, $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$. Donner une relation entre f et g, et en déduire la limite de g en 1.

Indication ▼ Correction ▼ [2618]

Exercice 26 ★★★★ **Étude d'une fonction –**

Étudier la fonction suivante sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt.$$

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 27 ★★★★★ **Le logarithme intégral –**

Question préliminaire : Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, soit $h : I \to \mathbb{R}$ continue, $u, v : J \to I$ de classe C^1 et

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} h(t)dt.$$

Justifier que F est C^1 et calculer sa dérivée. On définit, pour $x \in [0,1[$,

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

1. En utilisant la concavité du logarithme, démontrer que

$$\forall x \in]0,1[,\ \forall t \in]x^2,1],\ \frac{2\ln x}{x^2-1}(t-1) \leq \ln t \leq t-1.$$

2. En déduire que f se prolonge par continuité en 1.
3. Justifier que f est dérivable sur $[0,1]$, et calculer sa dérivée.
4. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{(t-1)}{\ln t} dt$.

Indication ▼ Correction ▼

7 Formules de Taylor

Exercice 28 **Valeurs approchées –**

1. Soit $a>0$. Démontrer que
$$\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}\right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$

En déduire que
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos(1/2) \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

2. Soit $a>0$. Démontrer que
$$\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}\right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$

3. En déduire que
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos(1/2) \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

4. Soit x un réel strictement positif. Démontrer que :
$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^3}{3}.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 29 ★★★ **Limite de suites –**

1. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Démontrer que (u_n) converge vers $\exp(1)$.

2. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Montrer que cette suite converge vers $\ln(2)$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 30 **Inégalités de Kolmogorov –**

Soit f une fonction définie sur , de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées, et l'on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in} |f(x)|, \quad M_2 = \sup_{x\in} |f''(x)|$$

(M_0 et M_2 sont donc des nombres réels tels que, pour tout x réel, on a $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$). Le but de cet exercice est de prouver que f' est bornée, et de majorer $M_1 = \sup_{x\in} |f'(x)|$ en fonction de M_0 et M_2. Soit $x \in$, et $h > 0$.

1. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x et $x+h$ à l'ordre 1 (c'est-à-dire qu'on veut approcher $f(x+h)$ par le polynôme de Taylor de degré 1 de f en x).

2. En déduire l'inégalité :

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

En particulier, si on choisit $h = 1$, on obtient $|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$ pour tout x de , ce qui prouve que f' est bornée, avec $M_1 \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$. On se propose de trouver une meilleure majoration :

3. Etudier la fonction $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0,+\infty[$.

4. En déduire $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 31 ★★★ **Contrôle des dérivées –**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et $\lambda > 0$ vérifiant :

$$\begin{cases} f^{(n)}(0) = 0 \text{ pour tout entier } n \geq 0 \\ \sup_{\mathbb{R}} |f^{(n)}| \leq \lambda^n n! \end{cases}$$

1. Montrer que $f = 0$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$.
2. Montrer que $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 32 **Une égalité étrange –**

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$, prouver que :

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\ln 2}{2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [599]

Exercice 33 ★★★ **Inégalités –**

Démontrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}.$$

Indication ▼ Correction ▼

8 Méthodes numériques

Exercice 34 **Méthode du point médian** –

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On pose $I=\int_a^b f(t)dt$, $I_m=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. On note $M_2=\max\{|f''(x)|;\ x\in[a,b]\}$.

1. Soit $\Delta(x)=\int_{c-x}^{c+x} f(t)dt-2xf(c)$, où $c=\frac{a+b}{2}$. Montrer que $|\Delta''(x)|\leq 2xM_2$ pour tout $x\in[0,\frac{b-a}{2}]$. En déduire une majoration de $\Delta\left(\frac{b-a}{2}\right)$, puis que

$$|I-I_m|\leq M_2\frac{(b-a)^3}{24}.$$

2. Pour tout $n\geq 1$, on pose $I_{m,n}=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$ où $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)dx-I_{m,n}\right|\leq\frac{(b-a)^3}{24n^2}M_2.$$

Indication ▼ Correction ▼ [428]

Exercice 35 ★★★ **Méthode des trapèzes –**

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On pose $I = \int_a^b f(t)dt$ et on note $M_2 = \max\{|f''(x)|;\ x \in [a,b]\}$.

1. Montrer que $I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)dt$.

2. Montrer que $\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2} dt = \frac{(b-a)^3}{12}$.

3. On fixe $n \geq 1$, et on pose $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On note I_n la valeur approchée de I obtenue par la méthode des trapèzes avec n intervalles. Exprimer I_n en fonction des a_k, puis démontrer que

$$|I - I_n| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [429]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Découper l'intégrale en somme d'intégrales sur des intervalles du type $[p, p+1]$, où p est un entier.
2. Remplacer $|x|$ par sa valeur en intégrant sur $[-1,0]$, puis sur $[0,2]$.
3. Si $a \in [0,1]$, il faut utiliser la relation de Chasles...

Indication pour l'exercice 2 ▲

$f = 1$

Indication pour l'exercice 3 ▲

Écrire toute sous la même intégrale et remarquer que la fonction qu'on intègre est positive.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Se ramener à $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ et calculer $\int_a^b \big(|f(t)| - f(t)\big)dt$. Conclure à l'aide d'un théorème du cours.

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Si f ne s'annule pas, elle est toujours strictement positive ou strictement négative.
2. Supposons que f s'annule en changeant de signe en au plus un point c et considérer $g(x) = (x-c)f(x)$.
3. Remarquer que $\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$ pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n, puis raisonner comme à la question précédente.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Utiliser l'inégalité des accroissements finis.
2. Majorer $F(x) - F(y)$ en utilisant les propriétés de l'intégrale, et utiliser la question précédente.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Séparer l'intégrale définissant u_n en fonction d'une subdivision adaptée à φ. Pour la seconde question, approcher une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Dériver la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Comment prouver qu'une fonction (dérivable) est constante ?
2.

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Représenter les différences comme l'intégrale de la dérivée.
2. Une fonction continue et périodique est bornée.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Dériver deux fois par rapport à y.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Mettre u_n sous la forme $u_n = \frac{1}{n}(f(a) + f(a+(b-a)/n) + \cdots + f(b))$. Pour le 4., utiliser d'abord l'écriture exponentielle.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Utiliser la fonction exponentielle pour se ramener à une somme de Riemann.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Interpréter cette somme comme une somme de Riemann. On pourra écrire $p = n+k$.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Approcher $\int_a^b f(t)dt$ par sa somme de Riemann, et utiliser la convexité de g.

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Majorer la fonction à intégrer (le dénominateur).
2. Mettre x^n en facteur.
3. Si on exprime la somme en fonction des I_n, la plupart des termes se simplifient.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Encadrer d'abord $\ln(t)$ sur $[i, i+1]$, puis intégrer. Faire la somme de 2 à $n-1$, puis ajouter les bords...
2. Encadrer d'abord $\ln(t)$ sur $[i, i+1]$, puis intégrer.
3. Faire la somme de 2 à $n-1$, puis ajouter les bords...
4. Intégration par parties.
5. Appliquer la définition.

Indication pour l'exercice 18 ▲

1. Utiliser le fait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1]$.
2. Il faut sommer les inégalités précédentes et utiliser la relation de Chasles.
3.
4. Que suffit-il pour qu'une suite bornée converge ?

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Utiliser un changement de variables.
2. $\sin^{n+1} t \leq \sin^n t$.
3. Utiliser une intégration par parties.
4. Se ramener à I_0 et à I_1 en utilisant la formule ci-dessus. On voit alors apparaitre des produits qui ressemblent à des factorielles avec des trous. Compléter les trous des produits où n'apparaissent que des termes impairs. Là où n'apparait que des termes pairs, factoriser tous les termes par 2.
5. Utiliser les formules de la question précédente, en séparant les cas n pair et n impair.
6. Une inégalité a déjà été prouvée. Pour l'autre partie, utiliser la formule de récurrence, et la décroissance de (I_n).
7. C'est une conséquence relativement directe des deux résultats précédents.

Indication pour l'exercice 20 ▲

Encadrer les fonctions à intégrer par des fonctions que l'on sait facilement intégrer. Intégrer ces inégalités, puis utiliser le théorème des gendarmes.

Indication pour l'exercice 21 ▲

1. Faire une intégration par parties.
2.

3. Pour démontrer que (I_n) est décroissante, on pourra utiliser sa définition à l'aide d'une intégrale. Pour déterminer la limite de (I_n), on pourra utiliser la relation de récurrence.

4.

5. Exprimer $J_n - I_n$ en fonction de $J_0 - I_0$.

6.

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. Majorer la fonction à intégrer pour obtenir l'inégalité de droite. Minorer sur l'intervalle $[0, \alpha]$ la fonction à intégrer pour obtenir l'inégalité de gauche.

2.

3. Passer à la limite dans l'inégalité de la première question.

4. Couper en $\pi/2 - \alpha$ cette fois.

Indication pour l'exercice 23 ▲

Fixer $\varepsilon > 0$ et A tel que $|f(x) - a| < \varepsilon$ pour $x > A$. Couper l'intégrale en A.

Indication pour l'exercice 24 ▲

1. Quel est le signe de $t^4 + t^2 + 1$?

2. Pour les variations, écrire f comme somme et composée de fonctions, puis dériver et utiliser la quantité conjuguée. Pour la limite aux bornes, minorer $t^4 + t^2 + 1$, une minoration grossière suffit.

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

2.

3.

4. Utiliser que, pour $t \in [x, 2x]$, on a $0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$

5.

6. Faire le changement de variables $u = -\ln t$.

Indication pour l'exercice 26 ▲

Justifier que f est dérivable, et calculer sa dérivée comme somme et composée de fonctions.

Indication pour l'exercice 27 ▲

1. La courbe réprésentative du logarithme est en dessous de sa tangente en 1, et au-dessus de sa corde liant $(x^2, \ln(x^2))$ à $(1, 0)$.

2. Intégrer les inégalités précédentes.

3. Appliquer le théorème fondamental du calcul intégral. Faire apparaitre $f(x)$ comme $F(v(x)) - F(u(x))$ où F est une primitive de $1/\ln t$ et u, v sont des fonctions bien choisies.

4. Intégrer f'.

Indication pour l'exercice 28 ▲

1. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à $\cos x$ entre 0 et x. Appliquer la formule précédente à $a = 1/2$.

2. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à $\cos x$ entre 0 et x.

3. Appliquer la formule précédente à $a = 1/2$.

4. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $\ln(1 + x)$.

Indication pour l'exercice 29 ▲

1. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle entre 0 et 1.

2. Appliquer l'inégalité de Taylor Lagrange à $f(x) = \ln(1+x)$. On pourra commencer par calculer par récurrence la dérivée k-ième de cette fonction.

Indication pour l'exercice 30 ▲

Pour la dernière question, choisir le h qui minimise la fonction.

Indication pour l'exercice 31 ▲

1. C'est l'inégalité de Taylor-Lagrange.
2. Translater la fonction de $1/2\lambda$.

Indication pour l'exercice 32 ▲

Calculer jusqu'à la dérivée seconde de f.

Indication pour l'exercice 33 ▲

Appliquer la formule de Taylor reste intégral à $f(x) = (1+x)^{-1/3}$.

Indication pour l'exercice 34 ▲

1. Dériver deux fois et appliquer l'inégalité des accroissements finis. Puis intégrer, sachant que $I - I_m = \Delta\left(\frac{b-a}{2}\right)$.
2. Utiliser l'inégalité triangulaire pour se ramener à chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ et utiliser la question précédente.

Indication pour l'exercice 35 ▲

1. Intégrer par parties $\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)dt$.
2. Calcul direct.
3. On a

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}.$$

Calculer $I - I_n$ en découpant I par la relation de Chasles, puis en utilisant les deux questions précédentes.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Si p est un entier, alors

$$\int_p^{p+1} \lfloor x \rfloor dx = \int_p^{p+1} p dx = p.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_m^n \lfloor x \rfloor dx &= \sum_{p=m}^{n-1} \int_p^{p+1} \lfloor x \rfloor dx \\ &= \sum_{p=m}^{n-1} p \\ &= \frac{(n-m)(n+m-1)}{2}\end{aligned}$$

(la dernière somme étant la somme d'une suite arithmétique).

2. On va, par la propriété de Chasles, faire la somme de l'intégrale sur $[-1,0]$, puis sur $[0,2]$, intervalles où s'exprime facilement $|x|$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 x|x|dx &= \int_{-1}^0 x|x|dx + \int_0^2 x|x|dx \\ &= \int_{-1}^0 -x^2 dx + \int_0^2 x^2 dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

3. Si $a \leq 0$, alors pour tout $x \in [0,1]$, on a $\min(x,a) = a$ et donc

$$\int_0^1 \min(x,a)dx = a.$$

Si $a \geq 1$, alors pour tout $x \in [0,1]$, on a $\min(x,a) = x$ et donc

$$\int_0^1 \min(x,a)dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Si $a \in [0,1]$, on découpe l'intégrale en deux et on trouve par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \min(x,a)dx &= \int_0^a x dx + \int_a^1 a dx \\ &= \frac{a^2}{2} + a(1-a) \\ &= a - \frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

On remarque que $b-a = \int_a^b 1 dx$, et donc que

$$\int_a^b \big(1 - f(x)\big)dx = 0$$

alors que $x \mapsto 1 - f(x)$ est une fonction continue sur $[a,b]$ et positive. C'est donc que $1-f$ est la fonction nulle, ou encore que $f = 1$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit f une solution. Alors

$$\int_0^1 \big(f(t)-f^2(t)\big)dt = 0 \iff \int_0^1 f(t)\big(1-f(t)\big)dt = 0.$$

Or, puisque f est à valeurs dans $[0,1]$, la fonction $t \in [0,1] \mapsto f(t)\big(1-f(t)\big)$ est positive ou nulle. De plus, elle est continue et son intégrale sur $[0,1]$ est nulle. Ainsi, elle est identiquement nulle. Ceci entraine que pour tout $t \in [0,1]$, on a $f(t) = 0$ ou $f(t) = 1$. On va en réalité prouver que $f = 0$ ou que $f = 1$ (observez que ce n'est pas la même chose ! Il y a inversion de quantificateurs...). Supposons en effet qu'il existe t_0 et t_1 dans $[0,1]$ avec $f(t_0) = 0$ et $f(t_1) = 1$. Alors, puisque f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 1/2$, ce qui ne peut pas être le cas. On en déduit que $f = 0$ ou $f = 1$.

Réciproquement, ces fonctions sont solutions. On a donc démontré que les seules fonctions continues $f : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt$ sont les fonctions constantes égales à 0 ou à 1.

Correction de l'exercice 4 ▲

Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas le problème), on peut supposer que $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. Alors on a

$$\int_a^b \big(|f(t)| - f(t)\big)dt = \int_a^b |f(t)|dt - \int_a^b f(t)dt = 0$$

d'après l'hypothèse. Or, la fonction $t \mapsto |f(t)| - f(t)$ est continue et positive, d'intégrale nulle. C'est nécessairement la fonction nulle, donc $f(t) = |f(t)|$ pour tout $t \geq 0$. Autrement dit, f est toujours positive.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$ et s'il n'existe pas de points où f s'annule en changeant de signe, alors on a $f \geq 0$ ou $f \leq 0$. Dans un cas comme dans l'autre, puisque f est continue, la condition $\int_a^b f(t)dt = 0$ impose que f est identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc f s'annule en changeant de signe en au moins un point.

2. Par la première question, on sait que f s'annule en changeant de signe en au moins un point c. Supposons que c soit l'unique point où f change de signe, et posons $g(x) = (x-c)f(x)$. Alors g est continue, elle garde un signe constant sur l'intervalle $[a,b]$ et, par hypothèse et linéarité de l'intégrale, elle vérifie

$$\int_a^b g(t)dt = 0.$$

g est donc identiquement nulle. Ceci entraîne que f est nulle, sauf éventuellement en c. Mais par continuité de f en c, f est identiquement nulle : contradiction.

3. On remarque d'abord que, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$$

pour tout polynôme P. Supposons maintenant que f s'annule en changeant de signes en k points $a_1, \ldots, a_k$, avec $k < n+1$. Alors la fonction

$$g(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_k)f(x)$$

garde un signe constant, est continue, et vérifie, par la remarque précédente, $\int_a^b g(x)dx = 0$. g est donc identiquement nulle, f aussi, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Ceci est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis. Rappelons que $(\sin)' = \cos$ et que $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De l'inégalité des accroissements finis, on déduit directement que, pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sin(u) - \sin(v)| \leq |u-v|.$$

2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors d'après les propriétés de l'intégrale

$$\begin{aligned}|F(x)-F(y)| &= \left|\int_a^b f(t)\big(\sin(xt)-\sin(yt)\big)dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(t)| \times \big|\sin(xt)-\sin(yt)\big|dt.\end{aligned}$$

On utilise alors le résultat de la question précédente pour trouve

$$\begin{aligned}|F(x)-F(y)| &\leq \int_a^b |f(t)|\cdot|x-y|\cdot|t|dt \\ &\leq \left(\int_a^b |tf(t)|dt\right)|x-y|.\end{aligned}$$

Ceci démontre bien que F est lipschitzienne.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ une subdivision adaptée à φ, et y_i la valeur prise par φ sur $]a_i, a_{i+1}[$. Remarquons que :

$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{i=0}^{p-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi(x)\sin(nx)dx \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} y_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p-1} y_i(\cos(na_i)-\cos(na_{i+1})).\end{aligned}$$

Soit M la plus grande des valeurs des $|y_i|$. On a :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p-1} 2M \leq \frac{2pM}{n}.$$

On en déduit bien que (u_n) tend vers 0. D'autre part, si φ est continue par morceaux sur $[a,b]$, et si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe une fonction en escalier ψ telle que, pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leq \varepsilon.$$

On a alors :

$$\int_a^b \varphi(x)\sin(nx)dx = \int_a^b (\varphi(x)-\psi(x))\sin(nx)dx + \int_a^b \psi(x)\sin(nx)dx.$$

On en déduit :

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin(nx)dx\right| \leq \left|\int_a^b (\varphi(x)-\psi(x))\sin(nx)dx\right| + \left|\int_a^b \psi(x)\sin(nx)dx\right|.$$

Maintenant, on choisit n_0 de sorte que pour $n \geq n_0$, on ait :

$$\left|\int_a^b \psi(x)\sin(nx)dx\right| \leq \varepsilon.$$

Pour un tel n, on a encore :

$$\left|\int_a^b (\varphi(x)-\psi(x))\sin(nx)dx\right| \leq \int_a^b \big|(\varphi(x)-\psi(x))\sin(nx)\big|dx \leq (b-a)\varepsilon.$$

Ceci prouve que, pour $n \geq n_0$, on a :

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin(nx)dx\right| \leq \varepsilon + (b-a)\varepsilon.$$

La propriété est conservée si φ est continue par morceaux.

Correction de l'exercice 8 ▲

Posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors F est identiquement nulle. De plus, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est dérivable, et sa dérivée est f. On a donc $F'(x) = f(x) = 0$, puisque $F \equiv 0$, ce qu'il fallait démontrer. On peut aussi procéder sans ce théorème en utilisant un raisonnement par l'absurde. Supposons en effet que f n'est pas identiquement nulle. On peut trouver un c dans $[a,b]$ tel que $f(c) \neq 0$. Pour fixer les idées, on peut supposer $f(c) > 0$. Mais alors, par continuité de f, on peut trouver un intervalle $[\alpha,\beta]$ autour de c, avec $\alpha < \beta$, tel que $f(x) \geq f(c)/2$ pour tout $x \in [\alpha,\beta]$. On obtient

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq (\beta-\alpha)\frac{f(c)}{2} > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Posons $h(x) = \int_0^x f(t)dt$. Alors $g(x) = h(x+T) - h(x)$. De plus, h est dérivable de dérivée f. On en déduit que g est dérivable et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$. Ainsi, g est constante ce qui prouve le résultat.

2. Si n est l'entier introduit par l'énoncé, on utilise la relation de Chasles pour écrire que

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^{nT} f(t)dt + \int_{nT}^{a+T} f(t)dt.$$

L'idée est de ramener chacune des intégrales dans l'intervalle $[0,a]$, par deux changements de variables différents. Pour cela, on écrit que

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_{a-(n-1)T}^{T} f(t+(n-1)T)dt + \int_0^{a-(n-1)T} f(t+nT)dt.$$

Utilisant la périodicité de f et à nouveau la relation de Chasles, on en déduit que

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_{a-(n-1)T}^{T} f(t)dt + \int_0^{a-(n-1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Cette deuxième méthode se comprend bien mieux en effectuant un dessin et en interprétant l'intégrale comme une aire.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. On écrit

$$f(nT) - f((n-1)T) = \int_{(n-1)T}^{nT} f'(u)du = \int_0^T f'(u)du = f(T) - f(0),$$

où la deuxième égalité est une conséquence du changement de variables $u = t - (N-1)T$ et du fait que f' est T-périodique.

2. De la question précédente, on déduit que

$$f(nT) - f(0) = n\big(f(T) - f(0)\big).$$

En particulier, la suite $(|f(nT)|)$ tend vers $+\infty$. La fonction f ne peut donc pas être périodique (peu importe la période) puisqu'une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Correction de l'exercice 11 ▲

Pour $y = 1$, la relation devient $f(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$. Par le théorème fondamental du calcul intégral, et par composition, la fonction f est de classe C^1. Dérivons la relation $2yf(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$ par rapport à y. On obtient, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$2f(x) = f(x+y) + f(x-y).$$

Redérivons ceci par rapport à y. On obtient, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$0 = f'(x+y) - f'(x-y).$$

Or, l'application $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Ceci signifie que l'équation précédente peut encore s'écrire, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x) - f'(y) = 0$. Autrement dit, f' est constante, et la fonction f est nécessairement une fonction affine. Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction affine $f(x) = ax + b$ est solution de l'équation.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. On a directement l'écriture sous la forme d'une somme de Riemann :

$$u_n \to \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}.$$

2. On écrit d'abord :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+1/n)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+n/n)^2}\right).$$

On a donc :

$$u_n \to \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

3. On a :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right),$$

et donc :

$$u_n \to \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}.$$

4. On a :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) + \cdots + \ln\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right)\right).$$

Par composition des limites, ceci converge vers :

$$\exp\left(\int_0^1 \ln(1+x^2) dx\right).$$

L'intégrale se calcule à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1+x^2) dx &= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\
&= \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx \\
&= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

On va se ramener à une somme de Riemann en utilisant la fonction exponentielle. On écrit donc

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n} \\
&= \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{n}\ln(k+n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln(1+n)+\cdots+\ln(n+n)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)+\cdots+\ln\left(n\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\exp\left(\frac{1}{n}\left(n\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\exp(\ln n)\exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

On pose $f(x)=\ln(x)$, fonction continue sur $[1,2]$, et on considère $S_n(f)$ la n-ième somme de Riemann de f entre 1 et 2. On a

$$v_n = \exp(S_n(f)).$$

Par le théorème des sommes de Riemann, on a

$$S_n(f) \to \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 \ln(x)dx.$$

Or,

$$\int_1^2 \ln(x)dx = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

Par le théorème de composition des limites, on trouve finalement que (v_n) converge vers $\exp(2\ln 2-1) = 4/e$.

Correction de l'exercice 14 ▲

On va interpréter cette somme comme une somme de Riemann. Ce n'est pas tout à fait immédiat, l'astuce consiste ici à écrire $p = n+k$ avec k dans $0,\ldots,n$. On a donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

On reconnait alors une somme de Riemann de la fonction continue $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0,1]$. On en déduit que

$$S_n \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

On va approcher f par sa somme de Riemann. Précisément, introduisons

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors, puisque f est continue, par le théorème des sommes de Riemann, on sait que (u_n) converge vers $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$. De plus, par convexité de g, on a

$$g(u_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\circ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Par continuité de $g \circ f$, le terme de droite converge vers $\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt$. Passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient bien l'inégalité dite de Jensen.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. On majore la fonction à intégrer, plus précisément le dénominateur. En effet, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \implies 0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on trouve

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème des gendarmes, la suite (I_n) tend vers 0.

2. On a

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \frac{1}{n+1}.$$

3. Notons $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$. En remplaçant $\frac{1}{k+1}$ par $I_k + I_{k+1}$, on trouve

$$S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots + (-1)^n (I_n + I_{n+1}).$$

De nombreux termes de cette somme se simplifient et on trouve

$$S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1}.$$

Comme (I_n) tend vers 0, on en déduit que (S_n) converge vers I_0. Reste à calculer cette dernière intégrale. On trouve

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Soit $t \in [i-1, i]$. Alors, puisque la fonction logarithme est croissante, on a

$$\ln(t) \leq \ln(i).$$

On intègre cette inégalité pour t parcourant $[i-1, i]$:

$$\int_{i-1}^i \ln(t) dt \leq \int_{i-1}^i \ln(i) dt = (i-(i-1))\ln(i) = \ln(i).$$

La deuxième partie de l'inégalité se prouve exactement de la même façon, en remarquant que pour tout t dans $[i, i+1]$, on a

$$\ln(i) \leq \ln(t).$$

On pourra remarquer que l'inégalité de droite est aussi valable si $i = 1$, ce qu'on utilisera dans la suite. On commence par sommer l'inégalité de gauche pour i allant de 2 jusqu'à n. Par la formule de Chasles, le membre de gauche est

$$\int_1^2 \ln(t) dt + \int_2^3 \ln(t) dt + \cdots + \int_{n-1}^n \ln(t) dt = \int_1^n \ln(t) dt.$$

Le membre du milieu vaut lui

$$\sum_{i=2}^n \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=2}^n i\right) = \ln(n!).$$

On somme ensuite la seconde inégalité pour i allant de 1 à $n-1$. On trouve

$$\ln\big((n-1)!\big) \leq \int_1^n \ln(t)dt.$$

Il suffit ensuite d'ajouter $\ln(n)$ de chaque côté de l'inégalité pour obtenir le résultat demandé.

2. Soit $t \in [i-1,i]$. Alors, puisque la fonction logarithme est croissante, on a

$$\ln(t) \leq \ln(i).$$

On intègre cette inégalité pour t parcourant $[i-1,i]$:

$$\int_{i-1}^{i} \ln(t)dt \leq \int_{i-1}^{i} \ln(i)dt = (i-(i-1))\ln(i) = \ln(i).$$

La deuxième partie de l'inégalité se prouve exactement de la même façon, en remarquant que pour tout t dans $[i,i+1]$, on a

$$\ln(i) \leq \ln(t).$$

On pourra remarquer que l'inégalité de droite est aussi valable si $i=1$, ce qu'on utilisera dans la suite.

3. On commence par sommer l'inégalité de gauche pour i allant de 2 jusqu'à n. Par la formule de Chasles, le membre de gauche est

$$\int_1^2 \ln(t)dt + \int_2^3 \ln(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^n \ln(t)dt = \int_1^n \ln(t)dt.$$

Le membre du milieu vaut lui

$$\sum_{i=2}^{n} \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=2}^{n} i\right) = \ln(n!).$$

On somme ensuite la seconde inégalité pour i allant de 1 à $n-1$. On trouve

$$\ln\big((n-1)!\big) \leq \int_1^n \ln(t)dt.$$

Il suffit ensuite d'ajouter $\ln(n)$ de chaque côté de l'inégalité pour obtenir le résultat demandé.

4. On réalise une intégration par parties, écrivant $\ln(t) = 1 \times \ln(t)$, d'où

$$F(x) = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}dt = x\ln x - x + 1.$$

5. Des deux questions précédentes, on tire

$$n\ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n\ln n + \ln n - n + 1$$

soit encore

$$1 + \frac{-n+1}{n\ln n} \leq \frac{\ln(n!)}{n\ln n} \leq 1 + \frac{\ln n - n + 1}{n\ln n}.$$

Par le théorème d'encadrement des limites, $\frac{\ln(n!)}{n\ln(n)}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Ceci signifie bien que $\ln(n!)$ est équivalent à $n\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 18 ▲

---

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[k,k+1]$. En particulier, pour tout $x \in [k,k+1]$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

On intègre cette inégalité pour x parcourant l'intervalle $[k,k+1]$. On en déduit que

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dt.$$

2. Sommons les inégalités précédentes pour k allant de 1 à $n-1$. Le membre le plus à droite de l'inégalité est

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}=u_n-\frac{1}{n}.$$

Le membre au milieu est

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx+\int_2^3 \frac{1}{x}dx+\cdots+\int_{n-1}^n \frac{1}{x}dx=\int_1^n \frac{1}{x}dx=\ln n.$$

Enfin, le membre le plus à gauche est

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=u_n-1.$$

On a ainsi obtenu la première inégalité demandée. De $u_n-1\leq \ln n$, on tire facilement $v_n=u_n-\ln n\leq 1$. De l'autre inégalité, $\ln n\leq u_n-\frac{1}{n}\leq u_n$, on tire $v_n=u_n-\ln n\geq 0$.

3. On a facilement

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n)=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}.$$

4. On va prouver que la suite (v_n) est décroissante. C'est en effet une conséquence de la question précédente et de l'inégalité

$$\frac{1}{n+1}\leq \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

prouvée à la première question. Ainsi, la suite (v_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est convergente. En revanche, puisque

$$u_n\geq \ln n+\frac{1}{n},$$

on en déduit que (u_n) tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Appliquons le changement de variables $u=\frac{\pi}{2}-t$. Alors

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt=-\int_{\pi/2}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)du=\int_0^{\pi/2}\cos^n(u)du.$$

2. Sur $[0,\pi/2]$, on a $0\leq \sin\leq 1$. Ceci entraine que, pour tout $t\in[0,\pi/2]$, on a $\sin^{n+1}(t)\leq \sin^n(t)$. Il suffit d'intégrer cette inégalité entre 0 et $\pi/2$ pour obtenir le résultat.

3. On intègre par parties I_{n+2} en écrivant $\sin^{n+2}t=\sin^{n+1}t\sin t$, en dérivant $\sin^{n+1}t$ et en intégrant $\sin t$. On obtient :

$$I_{n+2}=(n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cos^2 t\,dt=(n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^n t(1-\sin^2 t)dt.$$

Remettant ensembles tous les termes qui contiennent I_{n+2}, on obtient :

$$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n.$$

4. Remarquons par un petit calcul que

$$I_0=\frac{\pi}{2}\text{ et }I_1=1.$$

On a :

$$I_{2p}=\frac{2p-1}{2p}I_{2p-2}=\frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)}I_{2p-4}=\ldots.$$

On obtient :

$$I_{2p}=\frac{(2p-1)(2p-3)\times\cdots\times 3\times 1}{2p(2p-2)\times\cdots\times 4\times 2}I_0.$$

On complète les trous en haut en multipliant par $2p(2p-2)\dots 4\times 2$, et on obtient :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{\big(2p(2p-2)\times\cdots\times 4\times 2\big)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Il reste à simplifier le dénominateur. On trouve :

$$2p(2p-2)\times\cdots\times 4\times 2 = 2^p p(p-1)\times 1 = 2^p p!.$$

On obtient finalement

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

On peut refaire le même type de calcul pour I_{2p+1}, ou utiliser l'astuce suivante. D'après la formule de récurrence :

$$(2p+1)I_{2p+1} = (2p)I_{2p-1}.$$

On multiplie cette formule par I_{2p} :

$$(2p+1)I_{2p+1}I_{2p} = (2p)I_{2p}I_{2p-1}.$$

On réitère alors le procédé :

$$(2p+1)I_{2p+1}I_{2p} = (2p)I_{2p}I_{2p-1} = (2p-1)I_{2p-1}I_{2p} = \cdots = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit :

$$I_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)I_{2p}}\times\frac{\pi}{2},$$

ce qui donne :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

5. La formule peut se trouver très facilement à partir des formules trouvées ci-dessus, en séparant les cas n pair et n impair. On peut aussi la démontrer directement en utilisant l'astuce employée pour calculer I_{2p+1} à partir de I_{2p}.

6. On a déjà démontré que la suite (I_n) est décroissante, ou encore, puisqu'elle est positive, que $\frac{I_{n+1}}{I_n}\leq 1$. D'autre part, la formule de récurrence donne :

$$I_{n+1}\geq I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n.$$

Divisant par I_n, on obtient l'autre inégalité demandée.

7. De $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ et de l'inégalité précédente, on déduit :

$$\frac{\pi}{2}\leq (n+1)I_n^2 = \frac{\pi}{2}\frac{I_n}{I_{n+1}}\leq \frac{\pi}{2}\frac{n+2}{n+1}.$$

Il suffit ensuite de prendre la racine carrée de cette inégalité et de multiplier par $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ pour obtenir le résultat.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. On va encadrer la fonction à intégrer. Pour cela, on remarque que pour tout $x\in[0,1]$, on a

$$0 = \ln(1)\leq \ln(1+x)\leq \ln 2.$$

On multiplie cette inégalité par x^n, qui est positif, et on intégre. On trouve

$$0 = \int_0^1 0\,dx\leq \int_0^1 x^n\ln(1+x)dx\leq \int_0^1 (\ln 2)x^n dx = \frac{\ln 2}{n+1}.$$

Par le théorème des gendarmes, on remarque que (u_n) tend vers 0.

2. La méthode est complètement similaire. On remarque en effet que, pour tout $t \in [0,n]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{1+e^{nt}} \leq \frac{1}{e^{nt}} = e^{-nt}.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et n et on trouve

$$0 \leq u_n \leq \int_0^n e^{-nt} = \frac{1}{n}(1-e^{-n^2}) \leq \frac{1}{n}.$$

Par le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. On a $I_0 = e-1$. Pour obtenir la relation de récurrence, on va faire une intégration par parties, en posant $u'(x) = \exp(x)$ et $v(x) = (1-x)^{n+1}$, de sorte que $u(x) = \exp(x)$ et $v'(x) = -(n+1)(1-x)^n$. On trouve

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[e^x(1-x)^{n+1}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 e^x(1-x)^n dx \\ &= (n+1)I_n - 1. \end{aligned}$$

2. En utilisant $I_0 = e-1$, une fonction qui convient est la suivante : from math import * def suite(n) : I=exp(1)-1 ; for k in range(n) : I=(k+1)*I-1 return I

L'utilisation de cet algorithme donne des valeurs décroissantes pour I_n, positives pour $n \leq 17$ et négatives pour ≥ 18 (en particulier, $suite(18) \simeq -0.8702$). Si on continue, il semble que la suite tende vers $-\infty$, puisque $suite(100) \simeq -1.35 \times 10^{142}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq (1-x) \leq 1$, et donc

$$0 \leq (1-x)^{n+1} \leq (1-x)^n.$$

On multiplie par e^x (qui est positif), puis on intègre entre 0 et 1 pour trouver

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

On vient donc de prouver que la suite (I_n) est décroissante. De plus, elle est minorée par 0. Elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite, avec $\ell \geq 0$. On peut écrire aussi la relation $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ sous la forme

$$\frac{I_{n+1}}{n+1} = I_n - \frac{1}{n+1}.$$

Passant à la limite dans cette égalité, on trouve que $\ell = 0$. La conjecture est donc fausse ! Pour prouver que $\ell = 0$, on pouvait aussi observer que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq e^x(1-x)^n \leq e(1-x)^n$$

et donc

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 e(1-x)^n dx = \frac{e}{n+1}.$$

Par le théorème des gendarmes, (I_n) tend vers 0.

4. C'est immédiat !

$$J_{n+1} - I_{n+1} = (n+1)J_n - 1 - \big((n+1)I_n - 1\big) = (n+1)\big(J_n - I_n\big).$$

5. Une récurrence rapide démontre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n - I_n = n!(J_0 - I_0) = n!(a-e+1).$$

Puisque (I_n) tend vers 0, la suite (J_n)

tend vers 0 si $a = e-1$; tend vers $+\infty$ si $a > e-1$; tend vers $-\infty$ si $a < e-1$.

6. tend vers 0 si $a = e-1$;
7. tend vers $+\infty$ si $a > e-1$;
8. tend vers $-\infty$ si $a < e-1$.

9. Python ne pouvait pas permettre de formuler une bonne conjecture. En effet, il ne connait pas la valeur exacte de e, mais seulement une valeur approchée. Et pour la formule de récurrence donnée, la seule suite qui tend vers 0 est celle pour laquelle le premier terme vaut exactement e. Partant d'un mauvais premier terme (même si l'approximation est très bonne !), on a l'impression que la suite tend vers $-\infty$.

Correction de l'exercice 22 ▲

1. On remarque d'abord que, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

Si on intègre cette inégalité entre 0 et 1, alors on trouve

$$I_n \leq \int_0^1 dx = 1.$$

D'autre part, soit $x \in [0,\alpha]$. Alors $1+x^n \leq 1+\alpha^n$ et donc

$$\frac{1}{1+\alpha^n} \leq \frac{1}{1+x^n}.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et α et on trouve

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq \int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^n}.$$

D'autre part, si $x \in [\alpha,1]$, alors

$$\frac{1}{1+x^n} \geq 0 \implies \int_\alpha^1 \frac{dx}{1+x^n} \geq 0.$$

En faisant la somme des deux inégalités précédemment obtenues, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que, si $x \in [0,1]$, alors

$$x^{n+1} \leq x^n.$$

Il vient

$$\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^{n+1}}$$

et en intégrant cette inégalité, on trouve

$$I_n \leq I_{n+1}.$$

3. La suite (I_n) est croissante et majorée par 1. Elle converge vers un réel $\ell \leq 1$. Utilisons maintenant l'inégalité

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité, on trouve

$$\alpha \leq \ell.$$

On en déduit immédiatement que $\ell \geq 1$. En effet, si $\ell < 1$, alors on peut choisir $\alpha \in]\ell,1[$, et le résultat dit que $\alpha \leq \ell$ alors qu'on a choisi $\alpha > \ell$. C'est une contradiction et donc $\ell = 1$. Une autre façon de démontrer ce point est de dire que on peut faire tendre α vers 1 dans l'inégalité $\alpha \leq \ell$, et qu'en passant à la limite, $\alpha = 1$.

4. Fixons $\alpha \in [0, \pi/2]$. On remarque cette fois que, pour tout $t \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\sin(\alpha) \leq \sin(t) \implies -n\sin(\alpha) \geq -n\sin(t)$$

ce qui entraîne, puisque la fonction exponentielle est croissante,

$$e^{-n\sin t} \leq e^{-n\sin(\alpha)}.$$

Sur l'intervalle $[0, \alpha]$, on majore la fonction à intégrer par 1. En découpant l'intégrale en 2, entre $[0, \alpha]$ et entre $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, on trouve alors que

$$0 \leq J_n \leq e^{-n\sin(\alpha)}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \alpha \leq .$$

De plus, on vérifie que la suite (J_n) est décroissante. Ainsi, elle est convergente et, passant à la limite dans l'égalité précédente, sa limite ℓ vérifie

$$0 \leq \ell \leq \alpha.$$

Finalement, en raisonnant exactement comme précédemment, on trouve $\ell = 0$.

Correction de l'exercice 23 ▲

Soit $\varepsilon > 0$ et $A \geq 0$ tel que $|f(x) - a| < \varepsilon$. Pour $x > A$, on coupe l'intégrale en A.

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^A f(t)dt + \frac{1}{x}\int_A^x f(t)dt.$$

On peut trouver x_0 assez grand tel que, pour tout $x > x_0$, on a

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^A f(t)dt\right| < \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{x}\int_A^x (a-\varepsilon)dt \leq \frac{1}{x}\int_A^x f(t)dt \leq \frac{1}{x}\int_A^x (a+\varepsilon)dt$$

ce qui implique

$$\frac{(a-\varepsilon)(x-A)}{x} \leq \frac{1}{x}\int_A^x f(t)dt \leq \frac{(x-A)(a+\varepsilon)}{x}.$$

Il est alors possible de trouver x_1 tel que, pour tout $x > x_1$, on a

$$a - 2\varepsilon \leq \frac{(a-\varepsilon)(x-A)}{x} \text{ et } \frac{(x-A)(a+\varepsilon)}{x} \leq a + 2\varepsilon.$$

Pour $x > \max(x_0, x_1)$, on a donc

$$-3\varepsilon \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - a \leq 3\varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat voulu.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. Remarquons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t^4 + t^2 + 1 > 0$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \\ &= -\int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4+u^2+1}} \text{ (en posant } u = -t) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc impaire.

2. Posons $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. Alors, par le théorème fondamental du calcul intégral, F est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$. Or, $f(x)=F(2x)-F(x)$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2F'(2x)-F'(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}} \\ &= \frac{4(x^4+x^2+1)-(16x^4+4x^2+1)}{\left(2\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{16x^4+4x^2+1}\right)\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}} \end{aligned}$$

qui est du signe de $-12x^4+3$. La fonction est donc croissante sur $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$ et décroissante sur $]-\infty,-1/\sqrt{2}]$ et sur $[1/\sqrt{2},+\infty[$. Calculons maintenant la limite de f en $+\infty$ (on sait déjà que cette limite existe car la fonction est positive et décroissante). Pour $x>0$, on a

$$0\leq\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\leq\frac{2x-x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

ce qui donne $\lim_{+\infty} f(x)=0$. Par imparité de f, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Correction de l'exercice 25 ▲

1. Soit $x>0$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$, en particulier sur le segment $[x,2x]$. D'où l'existence de $\int_x^{2x}\varphi(t)dt$.

2. Par le théorème fondamental du calcul intégral, on a $f(x)=\phi(2x)-\phi(x)$. Puisque ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$), on en déduit que f est $\mathscr{C}^1$, et que sa dérivée vérifie pour tout $x>0$,

$$f'(x)=2\varphi(2x)-\varphi(x)=\frac{2e^{-2x}}{2x}-\frac{e^{-x}}{x}=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}.$$

3. Puisque la fonction $t\mapsto e^{-t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $x>0$, on a $e^{-2x}-e^{-x}\leq 0$ et donc $f'(x)\leq 0$. La fonction f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

4. Soit $x>0$. Pour $t\in[x,2x]$, on a $0\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{x}$ et donc $0\leq\varphi(t)\leq\frac{e^{-t}}{x}$ puisque $e^{-t}>0$. On intègre cette inégalité entre x et $2x$ et on trouve

$$0\leq f(x)\leq\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{x}dt=\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}.$$

Par le théorème des gendarmes, on trouve que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

5. Remarquons que pour tout $t\in[x,2x]$ on a l'encadrement $e^{-2x}\leq e^{-t}\leq e^{-x}$. On en déduit, en multipliant par $1/t>0$, que $\frac{e^{-2x}}{t}\leq\frac{e^{-t}}{t}\leq\frac{e^{-x}}{t}$ pour $t\in[x,2x]$. On intègre cette inégalité entre x et $2x$ et on trouve

$$\int_x^{2x}\frac{e^{-2x}}{t}dt\leq f(x)\leq\int_x^{2x}\frac{e^{-x}}{t}dt.$$

Ceci donne finalement

$$e^{-2x}\ln 2\leq f(x)\leq e^{-x}\ln 2.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x\to0} f(x)=\ln 2$.

6. Effectuons le changement de variables $u=-\ln t$ dans l'intégrale définissant g. Remarquons que ln réalise une bijection de $[x^2,x]$ sur $[\ln(x^2),\ln(x)]$ (attention, $x\in[0,1]$ et on a $x^2\leq x$) et que $du=\frac{-dt}{t}$ soit $dt=-e^{-u}du$. On trouve

$$g(x)=\int_{-\ln x}^{-\ln(x^2)}\frac{e^{-u}du}{u}=f(-\ln x).$$

Lorsque x tend vers 1, $-\ln x$ tend vers 0 et, par composition des limites, g tend vers $\ln(2)$.

Correction de l'exercice 26 ▲

Commençons par remarquer que f est π-périodique, car $\sin^2(\pi+x)=\sin^2(x)$ et $\cos^2(\pi+x)=\cos^2(x)$. Il suffit donc d'étudier f sur $[0,\pi]$. De plus, on a également $f(\pi-x)=f(x)$ et donc il suffit d'étudier f sur $[0,\pi/2]$.Soit $u(x)=\int_0^x \arcsin\sqrt{t}dt$ et $v(x)=\int_0^x \arccos\sqrt{t}dt$. Puisque les fonctions arcsin et arccos sont continues sur $[0,1]$, u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$, avec $u'(x)=\arcsin\sqrt{x}$ et $v'(x)=\arccos\sqrt{x}$. De plus, $f(x)=u(\sin^2 x)+v(\cos^2 x)$. Par composition, f est de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$, par conséquent sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est

$$f'(x) = 2\sin x\cos x\arcsin\sqrt{\sin^2 x}-2\sin x\cos x\arccos\sqrt{\cos^2 x}$$

On peut se restreindre à x dans l'intervalle $[0,\pi/2]$, et pour x dans cet intervalle, tout se passe bien, à savoir $\sqrt{\sin^2 x}=\sin x$, $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$ et $\arcsin(\sin x)=x$, $\arccos(\cos x)=x$. Il vient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin x\cos x-2x\sin x\cos x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=f(\pi/4)=\int_0^{1/2}(\arccos\sqrt{t}+\arcsin\sqrt{t})dt=\int_0^{1/2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

puisque l'on sait que pour tout $x\in[-1,1]$, $\arcsin(x)+\arccos(x)=\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 27 ▲

Pour la question préliminaire, fixons $a\in I$ et posons, pour $x\in I$, $H(x)=\int_a^x h(t)dt$. Puisque h est continue, le théorème fondamental du calcul intégral nous dit que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et que $H'=h$. Mais on a, par la relation de Chasles, pour tout $x\in J$,

$$F(x)=\int_{u(x)}^{a}h(t)dt+\int_a^{v(x)}h(t)dt=H\circ v(x)-H\circ u(x).$$

Par composition, F est dérivable sur J et

$$F'(x)=v'(x)h(v(x))-u'(x)h(u(x)).$$

1. La fonction logarithme est concave. Sa courbe représentative, entre les points d'abscisse x^2 et d'abscisse 1, est en dessous de la tangente en 1 et au dessus de la corde reliant $(x^2,\ln(x^2))$ à $(1,\ln 1)$. L'équation de la tangente est exactement $t\mapsto t-1$. Celle de la corde est

$$t\mapsto\frac{\ln(x^2)-\ln 1}{x^2-1}(t-1).$$

On en déduit exactement le résultat demandé.

2. On va passer à l'inverse et intégrer cette inégalité. Il faut simplement prendre garde que $x^2\leq x$. On a donc, pour $x<1$ et $t\in[x^2,x]\subset[x^2,1]$,

$$\frac{1}{t-1}\leq\frac{1}{\ln t}\leq\frac{x^2-1}{2\ln x}\times\frac{1}{t-1}.$$

On intègre, l'ordre des inégalités est changée car $x^2\leq x$, et on trouve

$$\int_x^{x^2}\frac{x^2-1}{2\ln x}\times\frac{dt}{t-1}\leq f(x)\leq\int_x^{x^2}\frac{dt}{t-1}$$

soit

$$\frac{x^2-1}{2\ln x}\left(\ln|x^2-1|-\ln|x-1|\right)\leq f(x)\leq\ln|x^2-1|-\ln|x-1|$$

soit, puisque $\ln|x^2-1| = \ln|x-1| + \ln(x+1)$,

$$\frac{(x-1)}{\ln x} \times \frac{(x+1)\ln(x+1)}{2} \leq f(x) \leq \ln(x+1).$$

Il suffit de passer à la limite pour prouver que f tend vers $\ln(2)$ lorsque x tend vers 1. On peut donc prolonger f par continuité en 1, avec $f(1) = \ln(2)$.

3. Posons pour $x \in [0,1[$, $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$. F, comme primitive d'une fonction continue, est dérivable sur l'intervalle $[0,1[$. De plus, on a $f(x) = F(x^2) - F(x)$. Par composition, f est elle-aussi dérivable sur $[0,1[$, et la question précédente a prouvé qu'elle était continue en 1. De plus, sa dérivée vaut

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xF'(2x) - F'(x) \\ &= \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} \\ &= \frac{x-1}{\ln x}. \end{aligned}$$

Ceci admet une limite lorsque x tend vers 1 (à savoir 1). Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est aussi dérivable en 1 avec $f'(1) = 1$.

4. Il suffit de remarquer que, puisque f est de classe C^1 sur $[0,1]$,

$$I = \int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0) = \ln 2.$$

Correction de l'exercice 28 ▲

1. Posons $f(x) = \cos x$. Alors ses premières dérivées successives sont $-\sin, -\cos, \sin, \cos, -\sin$, de sorte que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$ et $|f^{(5)}(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité demandée est alors exactement l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 appliquée à f entre 0 et a. Il suffit d'appliquer la formule précédente à $a = 1/2$.

2. Posons $f(x) = \cos x$. Alors ses premières dérivées successives sont $-\sin, -\cos, \sin, \cos, -\sin$, de sorte que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$ et $|f^{(5)}(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité demandée est alors exactement l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 appliquée à f entre 0 et a.

3. Il suffit d'appliquer la formule précédente à $a = 1/2$.

4. Notons $f(x) = \ln(1+x)$. On a :

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Puisque $x > 0$, on en déduit :

$$\forall t \in [0,x],\ |f'''(t)| \leq 2,$$

et l'inégalité de Taylor-Lagrange (que l'on peut appliquer puisque f est de classe C^3) donne donc :

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^3}{3}.$$

Remarquons que $(0,003)^3/3 = 9 \times 10^{-9} \leq 10^{-8}$. Une valeur approchée à 10^{-8} près de $\ln(1,003)$ est donc : $0,003 - (0,003)^2/2 = 0,0029955$.

Correction de l'exercice 29 ▲

1. Posons $f(x) = \exp(x)$, fonction de classe C^∞, et dont la dérivée k-ième vaut toujours $\exp(x)$. En particulier, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 0$,

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq \exp(1).$$

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre 0 et 1 et on trouve exactement que

$$|\exp(1) - u_n| \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

Par le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers $\exp(1)$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x)$. Cette fonction est de classe C^∞ sur $[0,1]$. On peut lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1. Or, on prouve facilement par récurrence que, pour tout $k \geq 1$ et tout $x \geq 0$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

En particulier, pour $x \in [0,1]$, on a $|f^{(k)}(x)| \leq (k-1)!$ et $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. Ainsi, on a

$$\left|\ln(2) - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}\right)\right| \leq \frac{n!}{(n+1)!}$$

soit $|\ln(2) - u_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Ceci prouve que (u_n) converge vers $\ln(2)$.

Correction de l'exercice 30 ▲

1. Puisque f est de classe C^2, il est légitime d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange. On a donc

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$$

2. On isole $f'(x)$ dans l'expression précédente :

$$f(x+h) - f(x) - \frac{M_2 h^2}{2} \leq hf'(x) \leq f(x+h) - f(x) + \frac{M_2 h^2}{2}.$$

Mais

$$-2M_0 \leq f(x+h) - f(x) \leq 2M_0,$$

et donc

$$-2M_0 - \frac{M_2 h^2}{2} \leq hf'(x) \leq 2M_0 + \frac{M_2 h^2}{2}.$$

Prenant la valeur absolue et divisant par h, on trouve bien

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{M_2 h}{2}.$$

3. Notons ϕ cette fonction, qui est dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifie

$$\phi'(h) = -\frac{2}{h^2} M_0 + \frac{M_2}{2}.$$

La dérivée s'annule au point $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$. Il est facile de vérifier qu'en outre la fonction est décroissante sur $]0,h_0[$, et croissante sur $]h_0,+\infty[$. La fonction ϕ admet donc un minimum en h_0.

4. La meilleure estimation que l'on peut espérer avec l'inégalité obtenue en 2. correspond au minimum de ϕ. Pour $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, on trouve exactement l'estimation demandée. En réalité, en considérant aussi $f(x-h)$, on peut améliorer le facteur 2 en $\sqrt{2}$, puis prouver que l'on ne peut pas faire mieux que $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 31 ▲

1. Soit $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre 0 et x à l'ordre n. Comme f et toutes ses dérivées en 0 sont nulles, on obtient que

$$|f(x)| \leq \frac{\sup_{[0,x]} |f^{(n)}| |x|^n}{n!} \leq (\lambda |x|)^n.$$

Maintenant, $|x|\lambda < 1$, et il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ pour déduire que $f(x) = 0$.

2. On va procéder de proche en proche en translatant la fonction pour montrer qu'elle est nulle sur des intervalles de plus en plus gros. Ainsi, posons $g(x) = f(x + 1/2\lambda)$. Alors g vérifie les mêmes hypothèses que

f, et donc d'après le résultat de la première question, elle est nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$. Revenant à f, ceci signifie que f est nulle sur $\left]\frac{-1}{\lambda},\frac{3}{2\lambda}\right[$. En considérant successivement les fonctions $g_n(x)=f(x+n/2\lambda)$, on va prouver que f est nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{n+1}{\lambda}\right[$, et ce pour tout n, donc sur $\left]-\frac{1}{\lambda},+\infty\right[$. Pour la partie négative, il suffit de considérer cette fois les fonctions $h_n(x)=f(x-n/2\lambda)$.

Correction de l'exercice 32 ▲

Remarquons que $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $f''(x)=\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$. On applique donc la formule de Taylor avec reste intégral à f entre 0 et 1, à l'ordre 2 :

$$f(1)=f(0)+f'(0)\times 1+\int_0^1 \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}(1-t)dt.$$

Puisque $f(1)=\ln 2$, $f(0)=f'(0)=0$, et factorisant $(1-t^2)$ en $(1-t)(1+t)$, on trouve le résultat souhaité.

Correction de l'exercice 33 ▲

Posons $f(x)=(1+x)^{-1/3}$. f est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et ses quatre premières dérivées sont :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{3}(1+x)^{-4/3} \\ f''(x) &= \frac{4}{9}(1+x)^{-7/3} \\ f^{(3)}(x) &= -\frac{28}{27}(1+x)^{-10/3} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{280}{81}(1+x)^{-13/3}. \end{aligned}$$

On applique alors la formule de Taylor reste intégral à la fonction f à l'ordre 3 entre 0 et $x\in[0,+\infty[$:

$$f(x)=1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}+\int_0^x (x-t)^2\frac{f^{(3)}(t)}{2}dt.$$

Or, pour tout $x\geq 0$ et tout $t\in[0,x]$, il est facile de vérifier que

$$(x-t)^2\frac{f^{(3)}(t)}{2}\leq 0.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et x et on trouve

$$f(x)\leq 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}.$$

L'inégalité de gauche s'obtient exactement de la même façon, en utilisant la formule de Taylor reste intégral à l'ordre 4 et le fait que $f^{(4)}\geq 0$ sur $[0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 34 ▲

1. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$\Delta'(x)=f(c+x)+f(c-x)-2f(c) \text{ et } \Delta''(x)=f'(x+c)-f'(c-x).$$

Utilisant l'inégalité des accroissements finis pour f' entre $c-x$ et $c+x$, on obtient bien que $|\Delta''(x)|\leq 2xM_2$ pour tout $x\in[0,\frac{b-a}{2}]$. On remarque ensuite que $I-I_m=\Delta\left(\frac{b-a}{2}\right)$. On doit donc estimer Δ, ce que l'on fait à partir de Δ' par intégration. On obtient en effet

$$|\Delta'(x)-\Delta'(0)|\leq\int_0^x|\Delta''(t)|dt\leq\int_0^x 2tM_2=M_2x^2,$$

soit $|\Delta'(x)| \leq M_2 x^2$ puisque $\Delta'(0) = 0$. Puisqu'on a aussi $\Delta(0) = 0$, on obtient également

$$\left|\Delta\left(\frac{b-a}{2}\right)\right| \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} |\Delta'(t)|dt \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} M_2 t^2 dt = \frac{M_2(b-a)^3}{24}.$$

2. On commence par utiliser la relation de Chasles pour écrire

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$$

puis on utilise l'inégalité triangulaire pour obtenir :

$$\left|\int_a^b f(x)dx - I_{m,n}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right|.$$

Maintenant, la différence $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$ correspond à l'erreur commise en appliquant la méthode du point milieu à l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. En utilisant le résultat de la première question, on obtient

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt - f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right| \leq \frac{(x_{k+1}-x_k)^3 M_2}{24} = \frac{(b-a)^3}{24n^3} M_2.$$

On somme n fois cette quantité, et on obtient bien l'inégalité demandé. On peut remarquer que la méthode du point médian est beaucoup plus efficace que la méthode des rectangles, puisqu'elle garantit une convergence en $1/n^2$ et non en $1/n$.

Correction de l'exercice 35 ▲

1. On va intégrer par parties $\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)dt$. On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)dt &= -\frac{1}{2}\int_a^b (t-b)f'(t)dt - \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)f'(t)dt \\
&= -\frac{1}{2}\left[(t-b)f(t)\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}\left[(t-a)f(t)\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt \\
&= -(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \int_a^b f(t)dt
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

2. C'est un calcul direct, à bien mener :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2} &= \frac{1}{2}\int_a^b (-t^2 + (a+b)t - ab)dt \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2} + ab(b-a)\right) \\
&= -\frac{b-a}{2}\left(-\frac{b^2}{6} - \frac{a^2}{6} + \frac{ab}{3}\right) \\
&= \frac{(b-a)^3}{12}.
\end{aligned}$$

3. L'aire du trapèze (rectangle) dont les sommets sont $(a_k, 0)$, $(a_k, f(a_k))$, $(a_{k+1}, f(a_{k+1}))$, $(a_{k+1}, 0)$ est $(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}$. On a donc

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}.$$

D'après la première question et la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(a_k-t)(a_{k+1}-t)}{2} f''(t)dt.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
|I - I_n| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(a_k - t)(a_{k+1} - t)}{2} f''(t) dt \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left| \frac{(a_k - t)(a_{k+1} - t)}{2} f''(t) \right| dt \\
&\leq M_2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{(a_k - t)(t - a_{k+1})}{2} dt \\
&\leq M_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a_{k+1} - a_k)^3}{12} \\
&\leq M_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{12n^3} \\
&\leq \frac{M_2 (b-a)^3}{12n^2}.
\end{aligned}$$